Nekaj nalog iz elementarne geometrije

1. Na stranicah AB, BC in CA trikotnika ABC so dane točke C_1, A_1 in B_1. Dokaži, da se krožnice, očrtane trikotnikom A_1B_1C, A_1BC_1 in AB_1C_1, sekajo v eni točki. Poišči množico vseh skupnih sečišč teh treh krožnic pri vseh mogočih legah točk A_1, B_1 in C_1.

2. Za katere točke E zunaj danega kvadrata $ABCD$ simetrala kota CED razdeli ta kvadrat na ploščinsko enaka dela?

3. Dokaži, da je polmer neenakostraničnemu trikotniku očrtane krožnice več kot dvakrat daljši od polmera temu trikotniku včrtane krožnice.

4. Nad stranicami AB, BC in CA trikotnika ABC postavimo kvadrate s središči C_1, A_1 in B_1. Dokaži, da je $|A_1B_1| = |CC_1|$ in da sta nosilki teh dveh daljic pravokotni med sabo.

5. V ravninski geometriji, ki zadošča prvima dvema skupinama Hilbertovih aksiomov, so dane štiri točke. Dokaži, da obstaja taka premica, da vse štiri točke ležijo na enem od njenih bregov.

6. Dan je trikotnik ABC. Pod kolikšnim kotom krožnica devetih točk tega trikotnika seka njegovo stranico AB?

7. Konstruiraj pravokotni trikotnik, če poznaš dolžino njegove hipotenuze in kot med težiščnicama na kateti.

8. Dokaži, da je vsota dolžin težiščnic trikotnika večja od treh četrtin njegovega obsega in manjša od njegovega obsega. Ali se da katero od teh dveh ocen izboljšati?

9. Inverzija preslika dano krožnico v krožnico, ki se je dotika in ima trikrat manjši polmer od nje. Kam ta inverzija preslika skupno tangento obeh krožnic?

10. V Poincaréjevem disku poišči enakostraničen šestkotnik, ki ima vse notranje kot prave.

11. Na Poincaréjevi polravnini $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ je dan trikotnik z oglišči $(0, 7)$, $(0, 5)$ in $(3, 4)$. Koliko merijo njegovi notranji koti?

12. Krožnica, ki gre skozi oglišče A paralelograma $ABCD$, seka stranici AB in AD v točkah B_1 in D_1, diagonalo AC pa v točki C_1. Dokaži, da velja

$$|AC| \cdot |AC_1| = |AB| \cdot |AB_1| + |AD| \cdot |AD_1|.$$

13. Na ravnini so dane nekolinearne točke A, B in C. Konstruiraj na tej ravnini take krožnice s središči v točkah A, B in C, da se vsaki dve dotikata med sabo.

14. Na ravnini, ki jo določajo dane tri nekolinearne točke, konstruiraj take krožnice s središči v teh točkah, da se vsaki dve sekata pod pravim kotom.

15. Naj bo P središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Točka X na poltraku AC in točka Y na poltraku BC ustrezata pogojema

$$|AX| \cdot |AB| = |AP|^2, \quad |BY| \cdot |AB| = |BP|^2.$$

Dokaži, da so točke X, Y in P kolinearne.

16. Točka T leži na simetrali danega kota z vrhom O, premica skozi T pa seka kraka tega kota v točkah A in B. Dokaži, da je vsota recipročnih vrednosti dolžin daljic AO in BO neodvisna od lege točk A in B.

17. Krožnici se dotikata od zunaj v točki T, njuni skupni tangenti, ki ne gresta skozi T, pa se ju dotikata v točkah A, B, C, D. Dokaži, da je štirikotnik $ABCD$ tangenten.

18. V tetivnem štirikotniku $ABCD$ velja enakost $|CD| = |AD| + |BC|$. Dokaži, da se simetrali kotov ABC in BAD sekata na stranici CD.

19. Dokaži, da pravokotne projekcije oglišča A trikotnika ABC na kotne simetrale notranjih in zunanjih kotov tega trikotnika ob oglišči B in C ležijo na premici.

20. Dan je ostrokotni trikotnik KLM. Konstruiraj tak ostrokotni trikotnik ABC, da nosilke njegovih višin iz oglišč A, B in C sekajo očrtano krožnico trikotnika ABC zaporedoma v točkah K, L in M.

21. Dan je ostrokotni trikotnik KLM. Konstruiraj tak ostrokotni trikotnik ABC, da simetrale njegovih notranjih kotov iz oglišč A, B in C sekajo očrtano krožnico trikotnika ABC zaporedoma v točkah K, L in M.

22. Konstruiraj pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom ob oglišču C, če poznaš dolžini njegove težiščnice in kotne simetrale iz oglišča C.

23. Naj bo $ABCD$ tetiven štirikotnik, katerega diagonala AC je premer njegove očrtane krožnice. Dokaži, da sta pravokotni projekciji stranic AB in CD na diagonalo BD enako dolgi.

24. Dan je pravokotnik $ABCD$. Poišči množico vseh točk T v prostoru, za katere velja
$$|AT| + |BT| = |CT| + |DT|.$$

25. Konstruiraj trikotnik, ki ima dane dolžine dveh stranic in simetrale notranjega kota med njima.

26. Iz središč pričrtanih krožnic trikotnika načrtamo pravokotnice na njegove stranice. Dokaži, da se nosilke teh pravokotnic sekajo v eni točki.

27. Naj bo P točka v notranjosti ostrokotnega trikotnika ABC. Trikotnik $A_1B_1C_1$ naj bo pedalni trikotnik točke P za $\triangle ABC$, trikotnik $A_2B_2C_2$ naj bo pedalni trikotnik točke P za $\triangle A_1B_1C_1$, trikotnik $A_3B_3C_3$ pa pedalni trikotnik točke P za $\triangle A_2B_2C_2$. Dokaži, da je trikotnik $A_3B_3C_3$ podoben trikotniku ABC.

28. Konstruiraj trikotnik ABC, če poznaš dolžino njegove težiščnice iz oglišča A ter dolžini višin iz oglišč B in C.

29. Naj bo A točka znotraj krožnice $\mathcal{K}$ s središčem S. Za katero točko T na $\mathcal{K}$ je kot STA največji?

30. Na ravnini Σ sta dani točki A in B. Krožnica $\mathcal{K}_A \subset \Sigma$ se dotika premice AB v točki A, krožnica $\mathcal{K}_B \subset \Sigma$ pa v B, pri čemer se krožnici med sabo dotikata. Zaznamujmo s C in D dotikališči skupne zunanje tangente krožnic $\mathcal{K}_A$ in $\mathcal{K}_B$, različne od AB. Poišči množico sredin vseh možnih daljic CD.

31. Na ravnini sta dani dve krožnici. Konstruiraj tako premico, da imata tetivi, ki ju krožnici odrežeta od premice, vnaprej predpisani dolžini.

32. V dano krožnico je včrtan tetiven štirikotnik $ABCD$, ki ima med sabo pravokotni diagonali AC in BD. Dokaži, da vsota $|AD|^2 + |BC|^2$ ni odvisna od lege oglišč A, B, C in D.

33. Na stranicah AB in AC trikotnika ABC ležita točki D in E, tako da velja $|AD| = |AE|$. Težiščnica AA_1 trikotnika ABC seka daljico DE v točki F. Dokaži, da je $|DF| : |EF| = |AC| : |AB|$.

34. Naj bosta SA in SB polmera krožnice s središčem S. Konstruiraj tetivo te krožnice, ki jo polmera SA in SB razdelita na tri skladne dele.

35. V ravnini so dane premice p, q in r, ki se sekajo v eni točki in vsaki dve oklepata med sabo kot $60°$. Za katere točke T te ravnine velja $|TP| = |TQ| + |TR|$, kjer so P, Q in R pravokotne projekcije T na p, q in r.

36. Težiščnice trikotnika ABC so enako dolge kot stranice trikotnika $A_1B_1C_1$, težiščnice trikotnika $A_1B_1C_1$ pa so enako dolge kot stranice trikotnika $A_2B_2C_2$. Dokaži, da je trikotnik $A_2B_2C_2$ podoben trikotniku ABC.

37. Naj bosta AA_1 in BB_1 kotni simetrali pravokotnega trikotnika ABC, A_2 in B_2 pa pravokotni projekciji točk A_1 in B_1 na hipotenuzo AB. Koliko meri kot A_2CB_2?

38. Na ravnini sta dani krožnici. Poišči in konstruiraj množico vseh točk te ravnine, iz katere vidimo obe krožnici pod enakim kotom.

39. Konstruiraj trikotnik, če poznaš dolžino ene od njegovih stranic, velikost kota nasproti te stranice in produkt dolžin drugih dveh stranic.

40. Naj bo ABC topokotni trikotnik, A_1, B_1 in C_1 pa nožišča njegovih višin iz oglišč A, B in C. Koliko merijo koti trikotnika ABC, če je trikotnik $A_1B_1C_1$ podoben trikotniku ABC?

41. Na ravnini so dane tri vzporednice. Dokaži, da obstaja enakostranični trikotnik, ki ima na vsaki od njih po eno oglišče.

42. Točka T leži znotraj trikotnika ABC, premice TA, TB in TC pa sekajo stranice BC, CA in AB zapored v točkah A_1, B_1 in C_1. Dokaži, da velja

$$\frac{|AT|}{|TA_1|} = \frac{|BT|}{|TB_1|} = \frac{|CT|}{|TC_1|}$$

natanko takrat, kadar je T težišče trikotnika ABC.

43. Vzporednica premice AB se dotika včrtane krožnice trikotnika ABC in seka stranici AC in BC v točkah D in E. Izrazi dolžino daljice DE z dolžinami stranic trikotnika ABC.

44. Premica poteka skozi težišče T trikotnika ABC in seka njemu očrtano krožnico v točkah M in N. Izrazi produkt $|TM| \cdot |TN|$ z dolžinami stranic trikotnika ABC.

45. Dan je trikotnik ABC. Konstruiraj točko X na stranici AC in točko Y na stranici BC, tako da bo $|AX| = |XY| = |YB|$.

46. Včrtana krožnica trikotnika ABC se dotika stranice AB v točki D, stranice AC pa v točki E. Premica DE seka simetralo kota ABC v točki F. Dokaži, da je $\angle BFC$ pravi kot.

47. Trikotniki ABC, ACD in ABD imajo (v istem zaporedju) težišča E, F in G. Dokaži, da točka A ter težišči trikotnikov BCD in EFG ležijo na eni premici.

48. Na ravnini Σ sta dani točki A in B. Poišči množico vseh tistih od A različnih točk X na Σ, katerih pravokotne projekcije B_X na premice AX ustrezajo pogoju $|XB_X| = |BB_X|$.

49. Točke A_1, B_1 in C_1 razpolavljajo stranice BC, AC in AB trikotnika ABC, točke A_2, B_2 in C_2 z roba trikotnika ABC pa ležijo na sredinah prelomljenih daljic BAC, ABC in ACB, torej tako, da sta poti od A_2 do B in C po robu trikotnika ABC enako dolgi in da podobno velja tudi za B_2 in C_2. Ali se premice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 sekajo v eni točki?

50. Nosilki stranic AB in CD tetivnega štirikotnika $ABCD$ se sekata v točki E, nosilki stranic AD in BC pa v točki F. Dokaži, da se simetrali kotov AED in AFB sekata pod pravim kotom.